



TITLE:

Sonic Analogue of Black Holes and Hawking Radiation (Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics)

AUTHOR(S):

阪上, 雅昭

CITATION:

阪上, 雅昭. Sonic Analogue of Black Holes and Hawking Radiation (Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics). 数理解析研究所講究録 2004, 1353: 163-177

ISSUE DATE:

2004-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25153>

RIGHT:

Sonic Analogue of Black Holes and Hawking Radiation

阪上雅昭*

京都大学大学院人間環境学研究科

1 はじめに

ブラックホール [1, 2] とは, 遠方にいる観測者にいかなる信号も送ることができない時空領域です. ブラックホールが存在する時空は, 無限遠方の観測者に信号 (光) を送ることができないブラックホール領域と無限遠方に信号 (光) を送ることが可能な外部領域に分けられます. この2つの領域の境界は事象の地平線 (horizon) とよばれ, 非常に重要な役割を果たします. ブラックホールの外部に物体を置いて自由落下させると, その物体はブラックホールに向かって落ちて行き, やがて horizon を通過してブラックホール領域に達します. しかし horizon の内側からは光を含めていかなるものも外部領域に出てくることは許されません.

ところが, この "何も放出しない" という古典的なブラックホール描像は量子論を考えることによって大きく変わってしまいます. ブラックホールが形成される前後での真空の変化に起因する粒子生成のため, ブラックホールは Planck 分布に従う輻射を放出し蒸発するという驚くべき結果が Hawking により示されました [3, 4]. この輻射は彼にちなんで Hawking 輻射と呼ばれ, ブラックホールの引き起こす最も興味深い現象の1つと認識されています. Hawking 輻射の存在には horizon が本質的に重要な役割を果たします. さて Hawking 輻射の特徴は

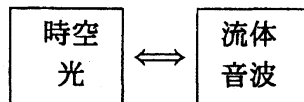
- (1) horizon 近傍での粒子の生成によりブラックホールからエネルギーが放出される.
- (2) 放射のスペクトルが Planck 分布に従う.

という2点に集約されます. この中で (1) は文字どおり量子論の粒子性という側面が色濃く現れているのに対して, (2) は horizon 近傍での波の伝搬の性質から導かれます. 具体的には, horizon の効果は horizon 近傍での引き延ばしという言葉で表されます. その結果として平面波に log 的なふるまいが生じ, その解析性から温

*sakagami@phys.h.kyoto-u.ac.jp

度が決定されることが示されます。本講演では (2) の側面に特に注目して Hawking 輻射について説明して行きます。

このような horizon の役割に注目して



という対応を考えてみましょう。観測者がいる上流から下流に向かって流れが加速され、ある場所で流速が音速を超えたとします。この sonic point の下流側で出された音波は流れを遡ることができないので観測者に到達できません。従って流速が音速を超える点は音波に対する (sonic) horizon の役割を果たしていて、ブラックホールでの Hawking 輻射と同じような現象が起こっていると期待できます [5]。本講演では sonic horizon というブラックホールの流体でのアナロジーを積極的に利用して Hawking 輻射を説明して行きます [6]。具体的には、音波、正確には速度ポテンシャルのゆらぎがブラックホール時空でのスカラー場の方程式と等価な波動方程式をみたすことを示します。この事実は sonic point のある流れでは量子化によって Hawking 輻射に対応する Planck 分布に従う粒子生成を引き起こすことを示唆しています。さらに Laval Nozzle を用いて sonic horizon のある流れの具体例をつくり、それを利用して Hawking 輻射のアナロジーを実験室で観測する計画を紹介します [6, 7]。

しかしながら、この粒子生成は sonic horizon に起因する真空の変化で引き起こされる量子場の理論特有の現象です。そのため、流体全体にわたって量子コヒーレンスが保たれていなければなりません。この点が実際に流体を用いて Hawking 輻射を観測する実験を行うときの大きな障害です。そこで本講演では最後に sonic horizon 近傍から、流れに逆らって伝搬してくる古典的な波を上流で観測した場合、量子論での粒子数の役割を古典的な波の Power Spectrum が果たし、それが Planck 分布に従うことを示します。

2 ブラックホールと Hawking 輻射

本講演では流体でのアナロジーが話題の中心になりますが、まず、まずブラックホールと Hawking 輻射について一般相対論や場の量子論をできるだけ用いないで直感的に理解して頂きたいと思います。

質量 M 半径 R の星 (球対称) に無限遠方から質量 m の物体を初速度ゼロで自由落下させます。星の中心と物体との距離を r 、物体の落下速度を v とするとエネルギー保存則より

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \implies v = -\sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (1)$$

という関係が得られます。ここで G は重力定数です。星の表面 $r = R$ での落下速度の符号を逆にした $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ が星の表面からの脱出速度を表しています。ここで星の質量を保ったままで半径 R を小さくして行くと脱出速度が大きくなりやがて光速 c を越えてしまいます。この条件は

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \geq c \implies R \leq \frac{2GM}{c^2} \equiv r_h \quad (2)$$

と表され、特に r_h は Schwarzschild 半径¹と呼ばれます。このように (2) を満たすほどに収縮した星では光が脱出できないブラックホール時空が現れ、脱出できないかの境界 $r = r_h$ が事象の地平線 (horizon) になっています。

少し違う見方をしてみましょう。相対論的な観点からは、(1) 式は自由落下している局所慣性系の落下速度を表しています。horizon では局所慣性系が光速で星の中心に向かって落下しているので、そこから外側に向かって光を放出しても horizon 外に伝搬して行くことはありません。ブラックホールと horizon に対するこのような見方は、流体でのアナロジーを考えると非常に有効になります。

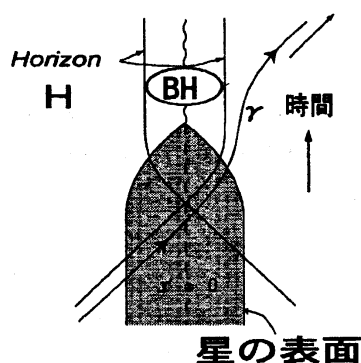


図 1: 星の重力崩壊とブラックホール形成

図 1 は星が収縮してブラックホールが生成される過程を画いた時空図です。縦軸が時間方向で星の表面が収縮し horizon の内部に落ち込みブラックホール領域ができています。また γ は遠方から $r = 0$ に中心のある星に向かって来て horizon が形成される直前に星の中心を通り horizon 近傍を通過して再び無限遠方に伝搬して行く古典的な光の軌跡 (世界線) を表しています。この光のふるまいがこれから重要な役割をします。

次にブラックホールのまわりの真空に注目しましょう。古典論では真空は物質が全く存在しない状態ですが、量子論ではゆらぎが存在するため古典論のように真空は単純なものではありません。光を例にとれば仮想的な光子対の生成と消滅が繰り返されています。ここで真空状態すなわちエネルギーはゼロであるため、光

¹ちなみに太陽の場合 $M_{\odot} \sim 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ですから、Schwarzschild 半径は $r_h \sim 3 \text{ km}$ になります。

子対の一方が正エネルギーならば他方は負エネルギーでなければなりません。これらの光子対は Minkowski 時空では量子ゆらぎとしてのみ存在できるので、仮想的な光子対と呼ばれます。ところがブラックホール時空では事情は一変します [4]. horizon 近傍で上の仮想的な光子対が生成された場合、ブラックホールの潮汐力の効果で光子対の中の負エネルギーの光子が horizon の中に落ち込み正エネルギー光子が horizon 近傍から脱出することが可能になります。この過程でブラックホールは負エネルギー光子を吸収しエネルギーを失い、正エネルギー光子が無遠方に飛び出して行くので、ブラックホールがエネルギーを放出しているように解釈できます。これが Hawking 輻射です。

潮汐力はブラックホールからの距離 r による落下速度 (1) の差で特徴づけられます。そこで表面重力 κ を horizon $r = r_h$ での速度勾配の大きさを用いて

$$\kappa \equiv \left| \frac{dv}{dr} \right|_{r_h} = \frac{c^3}{4GM} = \frac{c}{2r_h} \quad (3)$$

と定義すると horizon 近傍で潮汐力の効果が顕著になる領域の空間スケールは

$$\Delta r \sim \frac{c}{\kappa} \quad (4)$$

と特徴づけられます。このスケールから Hawking 輻射の温度を見積もりましょう。プランク定数を \hbar とすると不確定性関係から輻射に寄与するゆらぎのエネルギーは $\Delta E \sim \hbar \kappa / \Delta r \sim \hbar \kappa$ なので、エネルギー密度は

$$\epsilon \sim \frac{\Delta E}{(\Delta r)^3} \sim \frac{\hbar \kappa^4}{c^3} \quad (5)$$

で与えられます。これを温度 T の黒体輻射のエネルギー密度 $\epsilon = \frac{\pi^2}{15} c \hbar \left(\frac{kT}{c\hbar} \right)^4$ (k はボルツマン定数) と比較すると Hawking 輻射の温度 T_h が

$$kT_h \sim \hbar \kappa \sim \frac{c^3 \hbar}{4GM} \quad (6)$$

となります。

3 流体でのブラックホール

ここまでの議論で、ブラックホールの Hawking 輻射において horizon が重要な役割をすることは理解して頂いたと思います。ただし、粒子生成という側面に力点をおいて、この現象を説明してきました。さて horizon とは光が脱出できないブラックホール領域の境界でした。時空を流体そして光を音波に置き換えて見ましょう。私たちがいる上流から下流に向かって流れが加速され、ある点 (sonic point) で音速を超えたとします。sonic point の下流側で出された音波は私たちには到達

できないので, sonic point は音波に対して (sonic) horizon の役割を果たしています. つまり音波に対するブラックホールです [5, 6, 7]. 従って, sonic point が存在する流れの中での音波の伝搬に, Hawking 輻射と類似の性質があると期待できます. ここからは流体でのブラックホールを舞台にして, horizon 近傍での波の伝搬という観点から Hawking 輻射に迫っていきます.

3.1 完全流体の方程式と音波 (摂動)

以下の方程式に従う完全流体を考えましょう [8].

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (8)$$

ρ , p , \mathbf{v} は流体の密度, 圧力, 流速です. 議論を簡単にするために断熱的な理想気体

$$p = C\rho^\gamma, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (9)$$

とします. C は定数, C_p, C_v は定圧, 定積比熱です. さらに渦なし

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = \nabla \Phi$$

と仮定して速度ポテンシャル Φ を導入します. Euler 方程式 (7) を積分すると Bernoulli 方程式

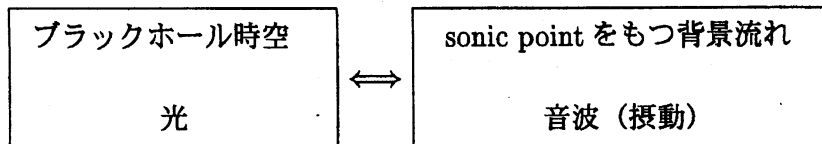
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + h(\rho) = 0 \quad (10)$$

が導かれます. ただし断熱的 (等エントロピー流れ) を仮定しているので

$$h(\rho) = \int^{p(\rho)} \frac{dp}{\rho} = \int^\rho \frac{c_s^2 d\rho}{\rho},$$

はエンタルピーまた $c_s = \sqrt{dp/d\rho}$ は音速です. ここで積分定数は速度ポテンシャルに吸収させました.

次に流れを, 背景流れとそのまわりの摂動である音波に分けて考えます. ブラックホール時空に関連させて考えると,



という対応があります。速度ポテンシャルと密度を

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_0 + \phi, & \phi &= \delta\Phi \\ \rho &= \rho_0(1 + \psi), & \psi &= \frac{\delta\rho}{\rho}\end{aligned}$$

と背景流れの物理量 (ρ_0, Φ_0) と摂動 (ϕ, ψ) に分けて方程式 (8)(10) に代入します。まず 0 次 (背景流れ) の方程式として

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_0 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + h(\rho_0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho_0 + \nabla(\rho_0\mathbf{v}_0) &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

さらに摂動の 1 次の方程式として

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\phi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\phi + c_s^2\psi &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\psi + \Delta\phi \\ + \nabla\ln\rho_0 \cdot \nabla\phi &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

が得られます。ここで $\mathbf{v}_0 = \nabla\Phi_0$ は背景流れの流速です。一次の方程式 (12) において ψ を消去し、さらに質量保存 (8) を用いて変形すると、速度ポテンシャルの摂動 ϕ に対する波動方程式 [5, 6, 7]

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right) \frac{\rho_0}{c_s^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \phi - \frac{1}{\rho_0} \nabla(\rho_0 \nabla \phi) = 0\tag{13}$$

すなわち背景流れの中での音波の伝搬を記述する方程式が導かれます。

3.2 背景流れの表す時空

ここで波動方程式 (13) がどのような時空での波の伝搬をシミュレートしているか考えてみましょう²。これを計量が $g_{\mu\nu}$ で与えられる一般の時空でのスカラー場 Φ のみたす方程式

$$\square\Phi(x^\mu) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi \right] = 0\tag{14}$$

²ここまですできるだけ一般相対論を用いないで解説をしてきましたが、3.2 章だけは一般相対論を若干用います。参考文献 [2, 6] を参照下さい。

と比較します。座標を $\{x^\mu\} = (t, x, y, z) \equiv (t, x^i)$ とすると波動方程式 (13) は計量を

$$g_{\mu\nu} = \frac{\alpha\rho_0}{c_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) & -v^i \\ -v^j & \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$

とおいた時空のスカラー場の方程式に対応することがわかります [5, 6, 7].

この計量がどのような時空に対応するか見てみましょう。議論を簡単にするため c_s は一定, $\alpha\rho_0/c_s = 1$ とします。さらに流れは x 方向一次元で流速は $v^i = (v(x), 0, 0)$ と与えると y, z 座標を無視した 2 次元時空の線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= -(c_s^2 - v(x)^2) dt^2 + 2v(x) dt dx + dx^2 \end{aligned}$$

となります。さらに新しい時間座標 τ を

$$d\tau \equiv dt - \frac{v}{c_s^2 - v^2} dx$$

のように導入すると

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{v(x)^2}{c_s^2}\right) c_s^2 d\tau^2 + \frac{dx^2}{\left(1 - \frac{v(x)^2}{c_s^2}\right)}$$

と変換されます。これは $v(x) = c_s$ となる x に horizon のあるブラックホール時空を表しています。特に速度を (1) のように選ぶと, Schwarzschild ブラックホールになっています³.

3.3 Horizon のある流れ : Laval Nozzle

具体的に sonic point のある一次元流れを考えましょう。軸対称で中ほどにくびれた throat があり両端に向かって広がっている管路を Laval Nozzle といいます [9]. 図 2 に Laval Nozzle の断面図を示します。管路の軸に沿った座標を x とし, 管路の断面積を $A(x)$ とします。断面積が緩やかに変化する場合, 流れは各断面で一様で, 一次元流と見なすことができます。この定常流は (11) で時間微分を落とすことで得られる方程式

$$J = \rho v A = \text{const.} \quad (\text{流量一定}) \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} v^2 + h(\rho) = \text{const.} \quad (\text{Bernoulli eq.}) \quad (17)$$

³ 正確には Schwarzschild 計量の角度部分を落とした 2 次元の計量です。

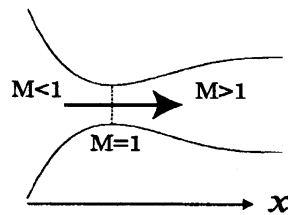


図 2: Laval Nozzle の断面図

で記述されます⁴. 上の2つの式の微分を取ると

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} &= 0 \\ v dv + c_s^2 \frac{d\rho}{\rho} &= 0\end{aligned}$$

となり, $d\rho/\rho$ を消去すると

$$\left(\frac{v^2}{c_s^2} - 1\right) \frac{dv}{v} = \frac{dA}{A} \quad (18)$$

という関係が得られます. 従ってマッハ数を $M = v/c_s$ とすると Laval Nozzle の流れは

$$\begin{aligned}M < 1 \quad dA < 0 &\rightarrow dv > 0 \\ M > 1 \quad dA > 0 &\rightarrow dv > 0\end{aligned}$$

となり亜音速では nozzle の断面積を減少させた方が加速され, 超音速では nozzle を断面積を増加させた方が加速されることがわかります. さらに, (18) から断面積が最小になる throat ($dA = 0$) が sonic point $M = 1$ になっているので図2のような流れが実現されます.

Nozzle を流れるのは断熱的な理想気体なので (9) よりエンタルピー h と音速 c_s は

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}, \quad c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \quad (19)$$

となります. さらに Nozzle の上流側に気体を貯める貯気槽がありそこでの密度と圧力を ρ_u, p_u , また流速はゼロすなわち $v_u = 0$ とすると Bernoulli 方程式 (10) は

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_u}{\rho_u} \quad (20)$$

で与えられます.

図3は Laval Nozzle (図2) の流れの圧力とマッハ数の分布を画いたものです. 入口 ($x = 0$) での圧力を一定にして出口 ($x = 3$) での圧力を変化させていきます. 出口

⁴以後, background の流れの密度, 圧力, 流速を ρ, p, v と表します

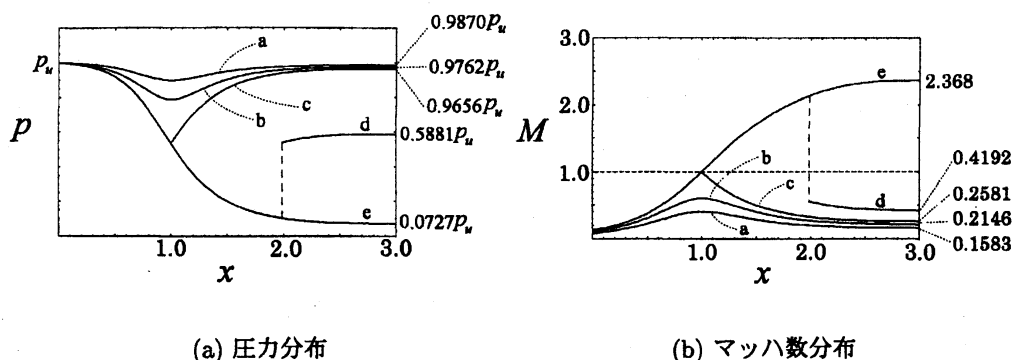


図 3: Laval Nozzle での圧力 p とマッハ数 M の変化. 比熱比は $\gamma = 7/5$. Nozzle の入口, throat, 出口はそれぞれ $x = 0, 1, 3$ にあります. case d の縦の破線は衝撃波面の生成を表しています.

圧力が高い場合 (case a, b) nozzle 内の流れは throat ($x = 1$) 前後ではほぼ対称で sonic point ($M = 1$) も発生していません. これは (18) において, throat 部分 ($dA = 0$) で速度勾配がゼロ ($dv = 0$) となり管路内いたるところで流れが亜音速であること cases a, b を示しています. 出口圧力を下げて行くと次第に throat でのマッハ数が大きくなり, 臨界値 (case c) で $M = 1$ になります. ここで流れの様相が大きく変化します. 今回は出口圧力が十分に下がった場合 (case e) を考えましょう. この場合, throat で $M = 1$ と sonic point が形成され, その上流側が亜音速 ($M < 1$), 下流側が超音速 ($M > 1$) と, 予想していた流れが実現されています. では, case c と e の間はどうなっているのでしょうか? 実はこの間の出口圧力に対応する等エントロピーな流れは存在しません. case d のような出口圧力に設定すると, 流れは下流側 ($1 < x < 3$) の適当な位置までは case e と同じになり, 衝撃波面を形成にともなうエントロピー生成により出口圧力につながる他の解に移ります. つまり case c と e の間で出口圧力を変化させることは, 単に衝撃波面の管内での位置を変化させるだけです. この Laval Nozzle の流れの性質は, 出口圧力を fine-tuning しなくても throat に安定に sonic horizon を形成できることを保証しており, Laval Nozzle が, horizon 形成とそれによる Hawking 輻射の実験室でのシミュレーションを行うのに非常に適した装置であることが理解できると思います.

4 Laval Nozzle での Hawking 輻射

Laval Nozzle での流れを用いて Hawking 輻射の解析を行いましょう. 3.3 章で説明した Laval Nozzle 内の定常的な流れを背景流れとし, それに対する摂動すなわち音波の伝搬を波動方程式 (13) を用いて解析します.

4.1 sonic horizon 近傍の流れと“表面重力”

Hawking 輻射に対しては throat 付近の流れの性質が特に重要な役割を果たします。上流側の密度 ρ_u で無次元化した密度を $\delta \equiv \rho/\rho_u$ とおくと、無次元化された圧力は $p/p_u = \delta^\gamma$ となり Bernoulli 方程式 (20) から

$$\frac{v}{c_{su}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} (1 - \delta^{\gamma-1})} \quad (21)$$

と流速が求められます。ここで $c_{su} = \gamma p_u / \rho_u$ は上流での音速です。また音速は (19) 式から

$$\frac{c_s}{c_{su}} = \delta^{(\gamma-1)/2} \quad (22)$$

と与えられるので、sonic point ($v = c_s$) での無次元密度の値

$$\delta_H = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (23)$$

が得られます。ちなみに、添え字 H は Nozzle の throat で実現される Horizon (sonic horizon) での物理量であることを意味しています。

図 2 のように具体的に Nozzle の形状を指定すると背景流れの x 依存性が決まります。しかし Hawking 輻射の解析では sonic horizon 近傍の流れだけが重要です。まず (3) 式に対応する流体のブラックホールの“表面重力”を音速が場所により変化していることを考慮して

$$\kappa \equiv \left| \frac{d(c_s - v)}{dx} \right|_H \quad (24)$$

と定義します。この表面重力が Hawking 輻射を特徴づける最も重要な物理量です。ちなみに sonic horizon ($x = x_H$) 近傍の座標 z を $x = x_H - z$ (下流側が $z > 0$) と導入すると、音速と流速の差は

$$c_s - v \sim \kappa z \quad (25)$$

と表されます。またマッハ数 v/c_s を用いると

$$\kappa = \left[c_s \left(-\frac{dM}{dz} \right) \right]_H \quad (26)$$

と与えられます。

次に、Nozzle の形状と表面重力の関係について考えましょう。まず、速度、音速と無次元密度の関係 (21)(22) から、無次元密度 δ が

$$\delta = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1/(\gamma-1)} \quad (27)$$

とマッハ数 $M = v/c_s$ で表されます。さらに流量保存 (16) を用いて導かれる

$$\frac{A}{A_H} = \frac{\rho_H v_H}{\rho v} = \frac{\rho_H}{\rho} \frac{c_s}{v} \frac{c_{sH}}{c_s}$$

に, (22)(23)(27) を適用すると Nozzle の断面積と Nozzle 内の流れのマッハ数の関係

$$\frac{A}{A_H} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (28)$$

が導かれます。この両辺を sonic horizon 近傍での座標 z で微分して得られる

$$-\frac{dM}{dz} = \left[\frac{\gamma+1}{4} \left(\frac{1}{A_H} \frac{d^2 A}{dz^2} \right) \right]^{1/2}$$

を (26) に代入すると Nozzle の形状と表面重力の関係

$$\kappa = \frac{c_{su}}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{A_H} \left(\frac{d^2 A}{dz^2} \right)_H \right]^{1/2} \quad (29)$$

が求められます。Nozzle は throat 近傍で対称です。断面を円としてその半径を

$$r(z) = r_H + \frac{\alpha}{2} z^2$$

と近似すると表面重力は

$$\kappa = c_{su} \left(\frac{\alpha}{r_H} \right)^{1/2} \quad (30)$$

と与えられます。

4.2 horizon 近傍での音波の伝搬

準備が完了したので sonic horizon 近傍での音波の伝搬を調べましょう。波の形を

$$\phi(x, t) \equiv e^{-i\omega t} \exp \left(i \int k(x) dx \right) \quad (31)$$

と置いて波動方程式 (13) に代入し WKB 近似つまり, 流速や波数の変化が波長に比べてゆるやかであると仮定すると, 最低次の方程式から分散関係

$$(c_s^2 - v^2) k^2 + 2\omega v k - \omega^2 = 0$$

が導かれ, 2つの解

$$k(x) = \begin{cases} -\frac{\omega}{c_s - v} \equiv k_{out} & \text{out-going} \\ \frac{\omega}{c_s + v} \equiv k_{in} & \text{in-going} \end{cases} \quad (32)$$

が得られます。ここで k_{out} は sonic horizon から流れに逆らって上流側に伝搬する波 (out-going wave) を, k_{in} は流れに乗って sonic horizon に向かって伝搬する波 (in-going wave) を表しています。従って k_{out} を (31) 式に代入して得られる波のふるまいが Hawking 輻射にとって重要な役割を果たします。

Laval Nozzle の背景流れが定常なので角振動数 ω は保存しますが, x 方向には一様でないので k は (32) 式のように場所により変化します。また, out-going wave の波数 k_{out} の表式は流速 v に逆らって上流に伝搬する音波の effective な音速が $c_s - v$ であることを示しています。これは背景流れに乗り sonic horizon に向かうことが, ブラックホールに自由落下する局所慣性系とともに落下して行くことに対応しています。さらに注目すべき点は horizon に近づくにつれ k_{out} が大きくなり激しく振動します。従って音波にとっての距離を node の数つまり振動の回数として定義すると horizon までの距離は発散してしまいます。これを horizon 近傍での引き延ばしといいます。実際 out-going wave の WKB 近似解は horizon 近傍 ($z \sim 0$) で

$$\begin{aligned}\phi_{\omega}^{out} &= \exp\left(i \int k_{out} dx\right) \\ &= \exp\left(i \frac{\omega}{\kappa} \ln z\right) \\ &= z^{i\omega/\kappa}\end{aligned}\tag{33}$$

となり, この引き延ばしの効果は sonic horizon で k_{out} が一次の極を持つために積分から \log 項が現れることからも見取れます。

4.3 Hawking 輻射の古典的対応物

上で議論した sonic horizon 近傍での音波の解析的な性質はブラックホールでの光の伝搬のそれと一致しているので, 流体での sonic horizon でも原理的には Hawking 輻射すなわち粒子生成が起こります [6]。しかしこの過程が量子論特有の現象であるため流体全体にわたって量子コヒーレンスが保たれていることが必要不可欠です。sonic point をもつマクロな流体においてそのような量子性を維持することは非常に困難なので, ここでは Hawking 輻射の古典的対応物を議論しましょう。

まず, 4.2 章で議論した WKB 解について考えましょう。観測を行う上流側の貯気槽付近では流速ゼロで音速は一定ですから, k_{out} (32) はそこでは平面波としてふるまいます。つまり, この WKB 解は実際に horizon 近傍を通過して観測装置のある貯気槽付近に伝搬してくる波, すなわち図 1 の γ に対応するのではなく, γ を上流で観測して各波数成分をとりだす Fourier 変換のための平面波なのです。

では γ に対応する波はどのようなもののでしょうか? 実は無限遠方から星の中心 $r = 0$ にやってきた波は, まだ horizon が形成されていないので引き延ばしの効果を受けていません。これは $r = 0$ 近傍では γ は平面波で近似できることを意味しています。この波が horizon 近傍を通過して無限遠方に伝搬していく過程で波形が大きく変えられるのです。そこで図 4 のように sonic horizon 近傍で古典的な out-going

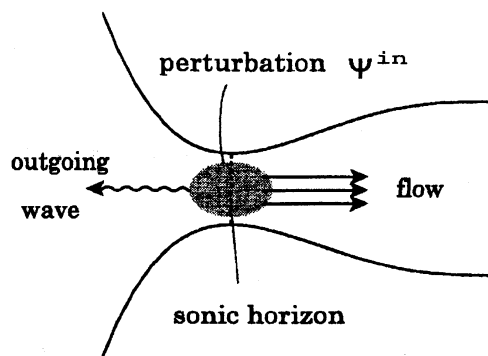


図 4: Laval Nozzle での Hawking 輻射

wave $\Psi^{in} = \exp(-i\Omega_{in}z)$ を打ち出し、その周波数成分を充分遠方の上流で観測すると考えます。この場合上流での振動数 ω の平面波は sonic horizon 近傍では (33) で与えられますから、上流で観測される Fourier 成分は、打ち出された波 Ψ^{in} と観測する波 ϕ_w^{out} の内積で与えられます。この係数を計算が容易な horizon 近傍で求めると

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_0^\infty dz e^{-i\Omega_{in}z} z^{i\omega/\kappa} \\ &= i\Omega_{in}^{-(1+i\omega/\kappa)} \exp\left(-\frac{\pi\omega}{2\kappa}\right) \Gamma\left(1+i\frac{\omega}{\kappa}\right) \end{aligned}$$

と Γ 関数で表されます。これから上流で観測される波の Power spectrum を求めると、上の Fourier 成分の解析的性質から

$$|f(\omega)|^2 \propto \frac{2\pi\omega}{\kappa} \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} \quad (34)$$

と Planck 分布に比例する形が得られます [6, 7]。これが Hawking 輻射の古典的な対応物を考えられます。

図 5 に実際の実験装置の模式図を示します。この場合、下流側の音源から音波を発射し、それを上流側のマイクで検出しその Power spectrum を測定します。もちろん、throat に sonic horizon が形成されれば下流側の音源からの音波は伝搬してきません。しかし、上流側から気体（空気）を流し始めた頃は sonic horizon が形成されていないので上流側に音波が伝搬します。従ってこの実験のセットアップでは sonic horizon が形成される直前に throat を通過してくる音波を上流側で観測することになります。圧力のゆらぎをマイクで検出すると、その Power spectrum は (34) と同様の計算で

$$|\delta p(\omega)|^2 = |\delta p_H|^2 \frac{c_{su}^2}{\Omega^4} \delta_H^{\gamma-3} \frac{2\pi}{\kappa} \frac{\omega^3}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} \quad (35)$$

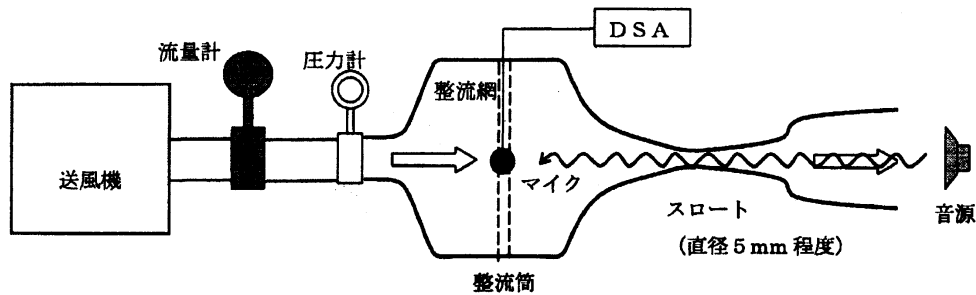


図 5: 実験装置の模式図

と与えられます。ここで $\Omega, \delta p_H$ は、音源から発せられた音波の throat での角振動数と圧力ゆらぎの大きさ、また δ_H は (23) で与えられる密度比です。

5 おわりに

本講演では、まずブラックホール時空での Hawking 輻射について説明した後、時空を流体、光を音波に置き換えることで音波に対する Hawking 輻射が存在していることを議論しました。この流体での Hawking 輻射は、ブラックホールの場合と異なり、原理的には実験できるので非常に興味ある現象です。しかし、Hawking 輻射が量子場の理論特有の現象なので、流体全体にわたって量子性が維持されていなければなりません。そこで、本講演では実験できる可能性のより高い古典的な観測量 (power spectrum) を議論しました。これにより Planck 分布の起源は、horizon 近傍を伝搬する波の受ける引き延ばし効果の結果として現れる波の解析的性質ということが理解できたと思います。このように流体での対応物を考えることで、Hawking 輻射という興味ある現象が horizon 近傍での波の数理的性質と密接に関係することが明瞭になり、しかも実験により検証できるという魅力的な状況を作ることができるのです。

参考文献

- [1] ブラックホールの興味ある性質については、キップ・S・ソーン 著、林一、塚原周信 訳「ブラックホールと時空の歪み アインシュタインのとんでもない遺産」、白揚社、1997、をご覧ください。
- [2] 一般相対論については、例えば、佐々木 節 著「一般相対論」、産業図書、1996 をご覧ください。

- [3] S. W. Hawking, Comm. Math. Phys.,43, pp.199-220,(1975)
- [4] 文献1 第12章
- [5] W.G.Unruh, Phys.Rev.Lett. 51,pp.1351-1353, (1981)
- [6] より詳しい解説は, 阪上雅昭, 大橋憲「流体での Hawking 輻射」物性研究 76 No.3, pp.328-373,(2001) をご覧下さい. この解説は <http://vishnu.phys.h.kyoto-u.ac.jp/~sakagami/download> からダウンロードできます.
- [7] M. Sakagami and A. Ohashi, Prog.Theor.Phys., 107,pp.1267-1272,(2002)
- [8] 流体力学については, 例えば, 巽友正 著「流体力学」, 培風館, 1982 をご覧ください.
- [9] リーマン, ロシュコ 著 玉田 訳「気体力学」, 物理学叢書15, 吉岡書店, 1960, 第2章, 第5章